CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

1980

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures - Coefficient : 7)

---==oOOo==---

Question préliminaire

1°) Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \ln(\frac{n+1}{n})$ est convergente.

2°) En déduire que l'expression :

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

tend vers une limite finie, que l'on désignera par C, quand n croît indéfiniment.

3°) Déterminer α pour que l'expression :

$$b_n = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \alpha \ln(n)$$

tende vers une limite finie quand n croît indéfiniment. Préciser la valeur de cette limite en fonction de C.

I.

x étant une variable réelle positive ou nulle, on pose :

$$f_n(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \text{Argth}x \quad \text{pour } x < 1$$

$$f_n(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \text{Argth}\frac{1}{x} \quad \text{pour } x > 1$$

1°) Etude de la fonction : $x \longrightarrow f_n(x)$:

a - Calculer la dérivée $f'_n(x)$; la mettre sous une forme simple ; calculer $f''_n(x)$.

b - Allure du graphe de $f_n(x)$.

2°) Etablir que $f_n(1 + \frac{1}{n})$ est strictement positif pour n suffisamment grand. En déduire qu'il existe un v_n unique appartenant à $]1, 1 + \frac{1}{n}[$ tel que $f_n(v_n) = 0$. Montrer que la suite de terme général v_n est monotone décroissante et a pour limite 1. Préciser l'allure du graphe du § 1°.

3°) Montrer que $f_n(x)$ peut s'écrire :

$$f_n(x) = -\int_0^x \frac{t^{2n}}{1 - t^2}\, dt \quad \text{ou} \quad \int_{v_n}^x \frac{t^{2n}}{t^2 - 1}\, dt$$

selon la valeur de x.

Justifier la première forme en considérant le développement en série entière de la fonction Argthx.

II.

1°) Montrer que pour tout x fixé supérieur à 1 $f_n(x)$ croît indéfiniment avec n. Expliquer pourquoi il n'y a pas contradiction avec $f_n(v_n) = 0$.

2°) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ $f_n(x)$ tend vers 0 quand n croît indéfiniment.

III.

1°) On pose $A_n = \int_0^1 f_n(t)\, dt$. Démontrer directement que cette intégrale est convergente, puis la calculer explicitement. En déduire sa limite A quand n croît indéfiniment.

2°) On pose : $B_n = \int_1^{v_n} f_n(t)\, dt$. Montrer que B_n tend vers 0 quand n croît indéfiniment.

3°) On pose enfin : $C_n = \int_{v_n}^{1+1/n} f_n(t)\, dt$.

Montrer que C_n tend aussi vers 0 quand n croît indéfiniment.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail